



Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Física – ECEN



REPORTE DE ADSCRIPCIONES DESARROLLADAS EN EL INSTITUTO DE ESTUDIOS NUCLEARES Y RADIACIONES IONIZANTES (IENRI).

Autor: Federico Gonzalez
Profesor a cargo: Dr. Rodolfo M. Id Betan

Período: Abril 2019 - Marzo 2020.

Resumen

Este trabajo es el resultado de una adscripción en el área de teoría de Física Nuclear realizada en el IENRI durante el año 2019.

En particular el tema a abordar es el estudio de resonancias en decaimiento radiactivo mediante los formalismos de Matriz de Scattering y Phase Shift.

Se presenta un marco teórico con las actividades desarrolladas durante el transcurso de la adscripción en orden cronológico de aprendizaje, necesarias para la descripción del problema. Luego se introduce el problema a resolver y los métodos para abordarlo. Finalmente se resumen las tareas desarrolladas y se presentan las conclusiones obtenidas.

1. Desarrollo de la adscripción

En esta sección se desarrollan las tareas de aprendizaje realizadas en orden cronológico. Los conceptos teóricos están entrelazados con los resultados obtenidos durante la adscripción, apareciendo a medida que se necesitan.

1.1. Introducción a los fenómenos de colisión y principios de causalidad.

Nos basamos en el libro Nussenzveig[2] - Capítulo Introductorio.

Muchas veces no se conocen todas las interacciones durante un proceso, pero si se puede observar los estados pasado lejano y futuro lejano. Un ejemplo de esta descripción son los choques entre partículas. Basado en este conocimiento no completo de la interacción y a partir de la "Ídea de Heisenberg", la cual consiste en que un sistema cuyas partículas están bastante alejadas entre sí se puede describir completamente, Wheeler introdujo la matriz de Scatterig (**S**) la cual relaciona el pasado lejano con el futuro lejano, sin intervenir las interacciones entre las partículas.

En este formalismo, en vez de especificar el Hamiltoniano del sistema, se estudian las propiedades de la matriz **S** y así se obtienen conclusiones del proceso.

Los principios importantes a considerar en la física son:

- Condición unitaria (probabilidad de todos los procesos es unitaria)
- Condición de causalidad

En particular, la analiticidad de la matriz **S** estará asociada con principios de causalidad macroscópica.

La *Causalidad Macroscópica*, también llamada *causalidad relativista* afirma que ninguna señal puede propagarse a velocidades mayores que la velocidad de la luz en el vacío.

Un principio aún más general es la *Causalidad Primitiva* que se basa en la idea una causa tiene como consecuencia un efecto.

Algunas ventajas del tratamiento de los problemas con la matriz **S** se pueden resumir en:

- No aparecen constantes de renormalización
- Describe correctamente los resultados
- Su aplicación predijo las interacciones pión-nucleón
- Es un esquema alternativo a la teoría de perturbaciones.

1.2. Conexión causalidad-analiticidad.

Basado en el libro Nussenzveig[2] - Capítulo I.

Para ilustrar la conexión entre causalidad y analiticidad se estudia un ejemplo simple de un oscilador armónico de masa m sujeto a una fuerza externa $F(t)$. La ecuación de movimiento es:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_o^2 x = F(t)/m = f(t) \quad (1)$$

donde ω_o es la frecuencia natural y $\gamma > 0$ es la constante de rozamiento.

Cuando $f(t) = 0$ la solución general se puede expresar de la forma:

$$x_0(t) = ae^{-i\omega_1 t} + be^{-i\omega_2 t}$$

donde a y b son constantes arbitrarias y ω_1, ω_2 son las raíces de:

$$\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2 = 0$$

Es decir;

$$\omega_{1,2} = \pm(\omega_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} - i\gamma$$

La solución general representa oscilaciones amortiguadas que decaen en forma exponencial, pudiendo definir un “tiempo de vida $1/\gamma$ ” como se muestra en la figura 1.

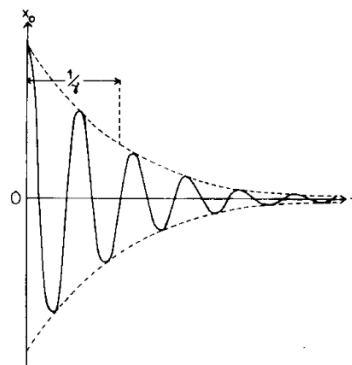


Figura 1: Oscilaciones libres de un oscilador armónico amortiguado. Crédito: Figura 1.1 Nussenzveig[2]

A continuación estudiaremos el caso de que la fuerza impulsora sea oscilatoria senoidal $f(t) = F_\omega e^{-i\omega t}$. De esta manera se puede proponer una solución $x(t) = X_\omega e^{-i\omega t}$, la cual, replazándola en (1) permite despejar X_ω :

$$X_\omega = -\frac{F_\omega}{\omega^2 + 2i\gamma\omega - \omega_0^2} = -\frac{F_\omega}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = G(\omega)F_\omega \quad (2)$$

Una primer tarea consistió en graficar la amplitud y la fase de $G(\omega)$ para $\omega_o = 1\text{rad/seg}$ y para diferentes coeficientes de roce γ . En las figuras 2 y 3 se grafica el módulo de la función $G(\omega)$ normalizada y la fase que se calcula como el arctan $\left(\frac{\Im\{G(\omega)\}}{\Re\{G(\omega)\}}\right)$

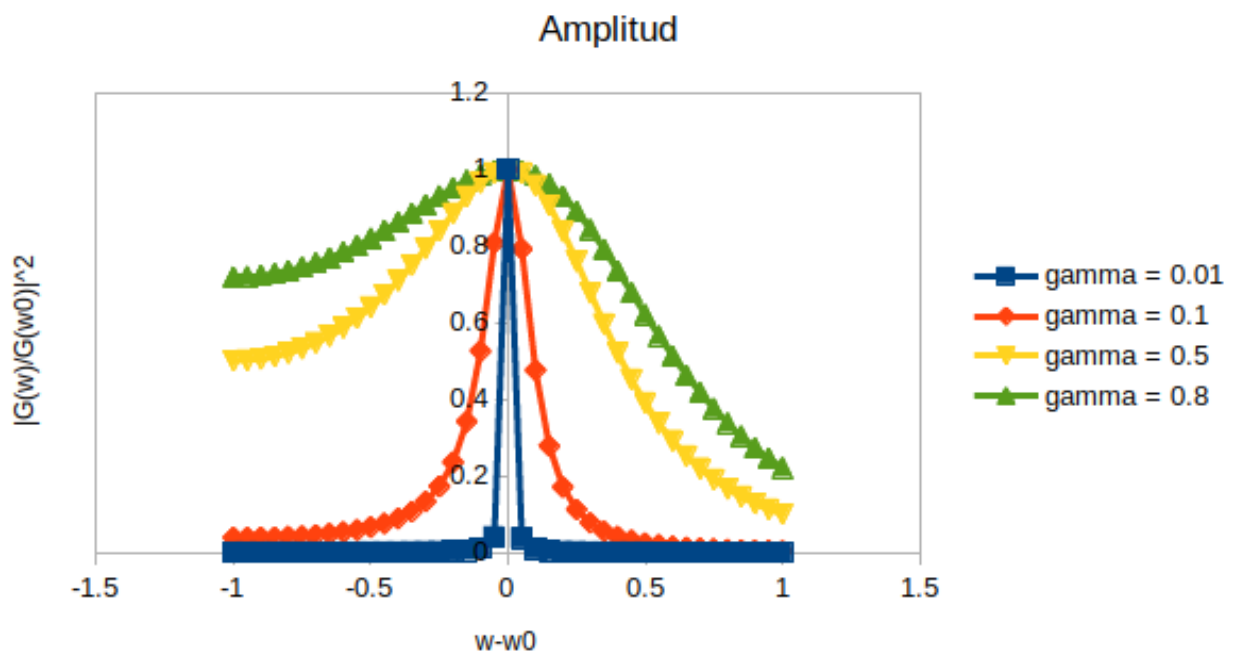


Figura 2: Diagrama de amplitud.

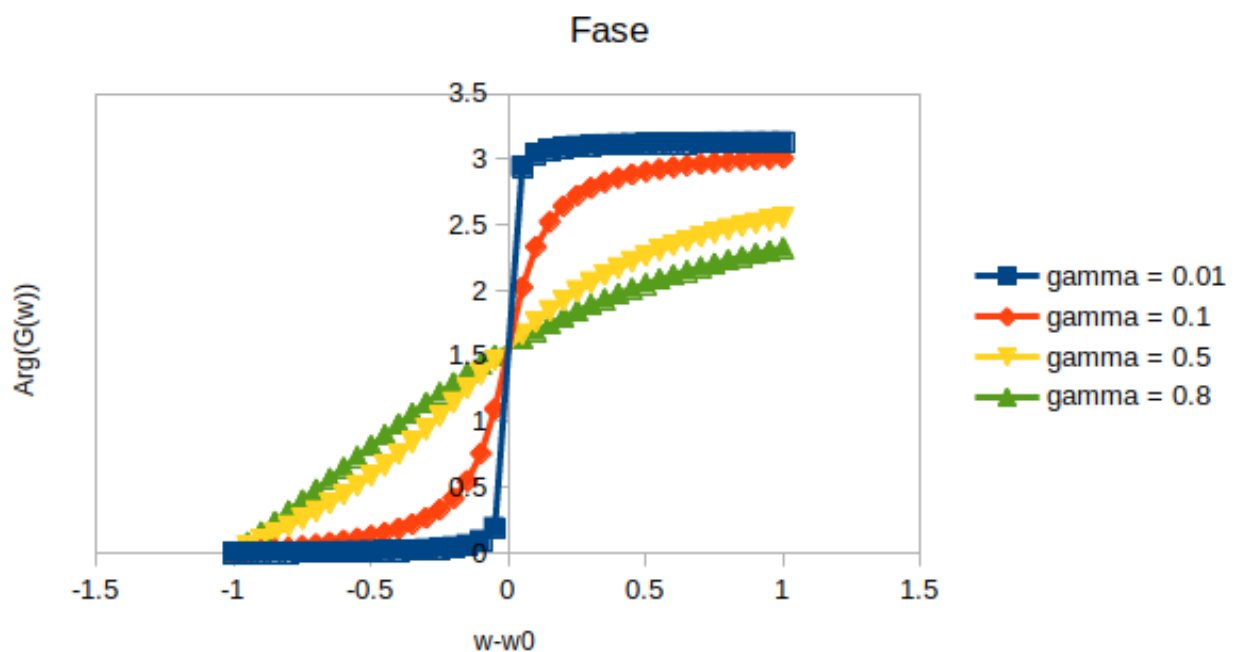


Figura 3: Diagrama de fase.

A medida que el coeficiente de roce aumenta, la parte compleja del denominador aumenta y esto se traduce en un ensanchamiento de la resonancia y en una variación lenta en la fase. Por otro lado cuando el coeficiente de roce disminuye la resonancia aumenta y la fase varía rápidamente de 0 a π .

Observación importante: al momento de graficar la fase se utiliza la función arcotangente la cual en muchas herramientas de cálculo brinda resultados para los ángulos comprendidos en el primer y cuarto cuadrante, debido a ello hay que corregir el resultado añadiendo un valor de π cuando la fase resulta negativa. Otra solución es utilizar funciones argumento que realizan esta corrección automáticamente.

Hasta ahora se resolvió el oscilador para una fuerza senoidal, pero aprovechando el hecho que cualquier función absolutamente sumable se puede representar con una integral de Fourier se plantea una fuerza de la forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

donde:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{i\omega t'} dt'$$

Al ser una ecuación diferencial lineal se puede aplicar el formalismo de función de Green. La solución general se puede expresar:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t') f(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (3)$$

donde:

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (4)$$

$$G(\omega) = -\frac{1}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$$

$$\omega_{1,2} = \pm(\omega_o^2 - \gamma^2)^{1/2} - i\gamma$$

La integral de la ecuación (4) la realizamos en el plano complejo. En primera instancia suponemos $\tau < 0$, luego debemos realizar un camino sobre el semiplano superior I_+ , de otra manera la integral diverge. Dicho camino se representa en la figura 4, donde se define la curva $\Gamma = I_+$.

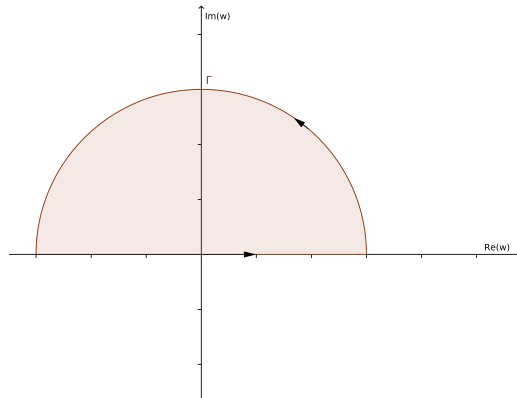


Figura 4: Curva de integración en el semiplano superior del plano complejo.

Como $G(\omega)$ no presenta polos en dicho semiplano resulta:

$$g(\tau) = 0 \quad (\tau < 0) \quad (5)$$

En cambio para $\tau > 0$ es necesario recurrir al camino por el semiplano inferior I_- y utilizar el teorema de los residuos de manera que:

$$g(\tau) = -2\pi i \sum \text{res} \left[\frac{G(\omega)}{2\pi} e^{-i\omega\tau} \right] \quad (\tau > 0)$$

Remplazando en la ecuación (3):

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\gamma(t-t')} \frac{\sin[(\omega_o^2 - \gamma^2)^{1/2}(t-t')]}{(\omega_o^2 - \gamma^2)^{1/2}} f(t') dt'$$

Debido a la ecuación (5) la posición $x(t)$ posee un valor nulo para valores anteriores a la aplicación de la fuerza, la cual se da para $t = 0$, a su vez la función de green resulta analítica en dicho intervalo. Esto indica una conexión entre el *principio de causalidad* y la *analiticidad de la función de Green*.

1.3. Análisis de la matriz de Scattering en mecánica cuántica

En esta sección se desarrolla una caracterización de la matriz de Scattering S en analogía con lo desarrollado en el complemento N_{III} del Cohen[1]. En dicho complemento se estudia la matriz de transmisión M para describir potenciales de forma arbitraria pero acotados que se utiliza como base para estudiar potenciales periódicos acotados.

El problema a considerar es resolver la ecuación de Schrödinger en un potencial unidimensional $V(x)$ de forma arbitraria que se anula fuera del intervalo $[-l/2, l/2]$, como se muestra en la figura 5¹.

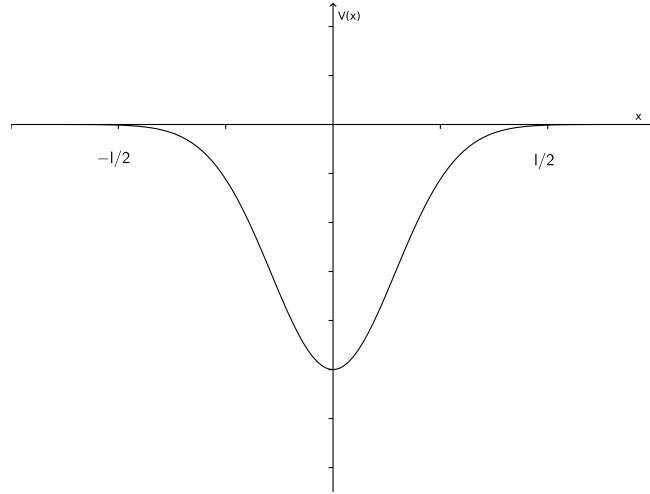


Figura 5: Ejemplo de potencial a considerar. Las unidades son: $[V] = \text{Joule}$, $[x] = m$

Para una energía estacionaria E la ecuación de Schrödinger se puede escribir:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x)) \right] \varphi(x) = 0 \quad (6)$$

definimos el parámetro:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Proponemos una solución u_1 consistente de una onda plana que ingresa desde la izquierda con amplitud unitaria, parte se refleja y parte atraviesa el potencial. De la misma manera una solución u_2 consistente de una onda plana que ingresa desde la derecha con amplitud unitaria. Es decir:

$$u_1(x) = \begin{cases} e^{ikx} + B e^{-ikx} & x < -l/2 \\ C e^{ikx} & x > l/2 \end{cases} \quad (7)$$

$$u_2(x) = \begin{cases} B' e^{-ikx} & x < -l/2 \\ e^{-ikx} + C' e^{+ikx} & x > l/2 \end{cases} \quad (8)$$

¹El diagrama es esquemático, más adelante se realizarán ejemplos con valores numéricos.

Luego la función de onda solución general de (6) será una combinación lineal de u_1 y u_2 ,

$$\varphi(x) = Au_1(x) + A'u_2(x) \quad (9)$$

Remplazando (7) y (8) en (9):

$$\varphi(x) = \begin{cases} (A)e^{ikx} + (AB + A'B')e^{-ikx} & x < -l/2 \\ (AC + A'C')e^{ikx} + A'e^{-ikx} & x > l/2 \end{cases} \quad (10)$$

Definimos:

$$\tilde{A}' \equiv AC + A'C' \quad (11)$$

$$\tilde{A} \equiv AB + A'B' \quad (12)$$

Reescribiendo (10) con dichas definiciones:

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + \tilde{A}e^{-ikx} & x < -l/2 \\ \tilde{A}'e^{ikx} + A'e^{-ikx} & x > l/2 \end{cases} \quad (13)$$

Las relaciones (11) y (12) se pueden expresar en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}' \\ \tilde{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & C' \\ B & B' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} \quad (14)$$

La matriz así definida se conoce con el nombre “matriz de Scattering” S .

$$S(k) = \begin{bmatrix} C & C' \\ B & B' \end{bmatrix} \quad (15)$$

Vemos que la matriz relaciona las constantes A y A' ⁽²⁾ con \tilde{A} y \tilde{A}' .

Necesitamos dar una interpretación a los coeficientes de dicha matriz. Del sistema (7) se observa que para una onda que ingresa desde la izquierda con amplitud unitaria, la amplitud reflejada es B y la transmitida es C . Por otro lado a partir del sistema (8) se observa que para una onda que ingresa desde la derecha con amplitud unitaria, la amplitud reflejada es C' y la transmitida es B' . De esta manera se interpreta cada coeficiente de la matriz.

Ahora daremos una interpretación a la matriz S a partir de (13) y (14). Vemos que la matriz S vincula los coeficientes A y A' que corresponden a amplitudes de ondas planas que **ingresan** de la izquierda y derecha, respectivamente, con los coeficientes \tilde{A} y \tilde{A}' interpretados como amplitudes de ondas planas que **salen** del sistema hacia la izquierda y derecha, respectivamente. La interpretación física de la matriz S es, por lo tanto, la vinculación entre las ondas que ingresan (**incomming**) con las que salen (**outgoing**).

Como paso siguiente, queremos relacionar los coeficientes B' y C' con B y C , es decir, queremos expresar $B' = B'(B, C)$ y $C' = C'(B, C)$, de esta manera la matriz S quedará en función de solo dos parámetros. Aprovechamos el hecho de que la ecuación de Schrodinger es lineal para considerar que si se cumple una combinación lineal de soluciones en un intervalo

²Las cuales dependerán del potencial $V(x)$ propuesto.

por lo tanto se cumple la misma combinación lineal en todo el espacio. Relacionamos u_1 con u_2 en el intervalo $x < -l/2$:

$$x < -l/2 \rightarrow \begin{cases} u_2 = B'e^{-ikx}, \bar{u}_2 = \bar{B}'e^{ikx} \\ u_1 = e^{ikx} + Be^{-ikx} = \frac{1}{\bar{B}'}\bar{u}_2 + \frac{B}{B'}u_2 \end{cases} \quad (16)$$

Planteando el mismo problema en el intervalo $x > l/2$

$$x > l/2 \rightarrow \begin{cases} u_1 = Ce^{ikx}, \bar{u}_1 = \bar{C}e^{-ikx} \\ u_2 = e^{ikx} + Be^{-ikx} = \frac{1}{\bar{C}}\bar{u}_1 + \frac{C'}{C}u_1 \end{cases} \quad (17)$$

Vinculando 16 con 17 se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones en las cuales se encuentran las variables C, C', B y B' . Despejando de dicho sistema se puede obtener la relaciones buscadas:

$$B' = \frac{1 - B\bar{B}}{\bar{C}} = \frac{1 - |B|^2}{\bar{C}} \quad (18)$$

$$C' = -\frac{\bar{B}C}{\bar{C}} \quad (19)$$

De la misma manera se pueden obtener las relaciones homólogas:

$$B = -\frac{B'\bar{C}'}{\bar{B}'} \quad (20)$$

$$C = \frac{1 - C'\bar{C}'}{\bar{B}'} = \frac{1 - |C'|^2}{\bar{B}'} \quad (21)$$

El paso siguiente es encontrar propiedades de la matriz S , en particular vamos a demostrar que dicha matriz es **unitaria**. Como primer paso remplazamos las relaciones encontradas ((18) y (19)) en la matriz S .

$$S(k) = \begin{bmatrix} C & C' \\ B & B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -\frac{\bar{B}C}{\bar{C}} \\ B & \frac{1-|B|^2}{\bar{C}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Escribimos la matriz adjunta S^\dagger .

$$S^\dagger(k) = \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{B} \\ \bar{C}' & \bar{B}' \end{bmatrix} \quad (23)$$

Desarrollamos los productos SS^\dagger y $S^\dagger S$:

$$SS^\dagger = \begin{bmatrix} |C|^2 + |C'|^2 & C\bar{B} + C'\bar{B}' \\ B\bar{C} + B'\bar{C}' & |B|^2 + |B'|^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$S^\dagger S = \begin{bmatrix} |B|^2 + |C|^2 & B\bar{B}' + C\bar{C}' \\ B'\bar{B} + C'\bar{C} & |B'|^2 + |C'|^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Podemos utilizar las relaciones (18), (19), (20) y (21) para reescribir las matrices de la siguiente manera:

$$SS^\dagger = \begin{bmatrix} |C|^2 + |B|^2 & (|C|^2 + |B|^2 - 1)\frac{\bar{B}}{C} \\ (|C|^2 + |B|^2 - 1)\frac{B}{\bar{C}} & |C'|^2 + |B'|^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$S^\dagger S = \begin{bmatrix} |C|^2 + |B|^2 & -(|C|^2 + |B|^2 - 1)\frac{B}{\bar{C}} \\ -(|C|^2 + |B|^2 - 1)\frac{\bar{B}}{C} & |C'|^2 + |B'|^2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ahora vamos a demostrar que (26) y (27) son unitarias. Observamos primero que la matriz de Scattering fue obtenida únicamente suponiendo que las funciones de onda (7) y (8) son soluciones de (6).

Para continuar necesitamos una condición adicional, que se puede obtener con la conservación del flujo de probabilidad. Recordamos algunos conceptos teóricos al respecto: la *corriente de probabilidad* asociada a una función de onda genérica se muestra en la ecuación (28), y el teorema de conservación del *flujo de probabilidad* en una dimensión se muestra en la ecuación (29).

$$J(x) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\phi^*(x) \frac{d\phi}{dx} - \phi(x) \frac{d\phi^*}{dx} \right) \quad (28)$$

$$\frac{d}{dx} J(x) = -\frac{d}{dt} |\phi(x)|^2 = 0 \quad (29)$$

La tercer igualdad en la ecuación (29) se debe a que el Hamiltoniano no depende del tiempo, por lo tanto la densidad de probabilidad tampoco.

Se podría analizar dicho flujo en la ecuación general (13). Sin embargo una manera más sencilla es observar que las ecuaciones (7) y (8) también verifican la ecuación de Schrodinger. Remplazando las soluciones (7) y (8) en (28) se obtiene:

$$\frac{\hbar k}{m} |C|^2 = \frac{\hbar k}{m} (|1|^2 - |B|^2)$$

$$\frac{\hbar k}{m} (|C'|^2 - |1|^2) = \frac{\hbar k}{m} |B'|^2$$

Del lado izquierdo corresponde a $x > l/2$ y del derecho a $x < l/2$. La igualdad se verifica debido a la ecuación (29). Finalmente se obtiene:

$$|C|^2 + |B|^2 = 1$$

$$|C'|^2 + |B'|^2 = 1$$

Con lo cual queda demostrado que la matriz S es unitaria. Al demostrar que es unitaria también se observa que S es *hermítica*. Como resultado adicional se observa que de la ecuación (18) se obtiene:

$$B' = C \quad (30)$$

Luego:

$$S(k) = \begin{bmatrix} C & C' \\ B & C \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$S^\dagger(k) = \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{B} \\ \bar{C}' & \bar{C} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Observación:

Hay otra manera de demostrar que la matriz S es unitaria que consiste en calcular la inversa S^{-1} :

$$S^{-1} = \frac{1}{C^2 - BC'} \begin{bmatrix} C & -C' \\ -B & C \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{C}} \begin{bmatrix} C & -C' \\ -B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C} & -\frac{\bar{C}C'}{\bar{C}} \\ -\frac{\bar{C}B}{\bar{C}} & \bar{C} \end{bmatrix}$$

Finalmente, comparando con (32):

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{C} & \bar{B} \\ \bar{C}' & \bar{C} \end{bmatrix} = S^\dagger$$

Pero además por la definición de inversa:

$$SS^{-1} = SS^\dagger = \mathbb{I}$$

De la misma manera se puede demostrar que $S^\dagger S = \mathbb{I}$. Lo que significa que S es unitaria.

Las dos propiedades anteriores de la matriz S (hermítica y unitaria) se cumplen en general, sea $V(x)$ real o no³

Sin embargo cuando $V(x)$ es real se verifica una propiedad adicional, la cual se conoce como *simetría de reversión temporal*. Vamos a demostrar que en este caso S es **simétrica**. Antes de demostrarlo mencionaremos el concepto de reversión temporal:

- La simetría de reversión temporal se puede analizar teniendo en cuenta la ecuación de Schodinger dependiente del tiempo:

$$\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

Conjugamos miembro a miembro:

$$\overline{\hat{H}\Psi(x, t)} = -i\hbar \frac{\partial \overline{\Psi(x, t)}}{\partial t}$$

Utilizamos el hecho de que $V(x)$ es real, por lo tanto $\overline{\hat{H}} = \hat{H}$

$$\hat{H}\overline{\Psi(x, t)} = -i\hbar \frac{\partial \overline{\Psi(x, t)}}{\partial t}$$

Luego ingresamos el signo $-$ dentro de la derivada parcial:

$$\hat{H}\overline{\Psi(x, t)} = i\hbar \frac{\partial \overline{\Psi(x, t)}}{\partial(-t)}$$

³Observe que únicamente se ha supuesto como válido que las soluciones de (6) son (7) y (8), pero no se ha tenido en consideración que $V(x)$ es real.

Realizamos el cambio de variable $t' = -t$:

$$\hat{H}\overline{\Psi(x, -t')} = i\hbar \frac{\partial \overline{\Psi(x, -t')}}{\partial t'}$$

Para el sistema estudiado, con V independiente del tiempo, alcanza con resolver la ecuación (6) vemos que, como $V(x)$ es real, tanto $\varphi(x)$ como $\overline{\varphi(x)}$ satisfacen dicha ecuación. Por lo tanto a partir de la solución (13) se puede escribir su conjugada:

$$\overline{\varphi(x)} = \begin{cases} \overline{A}e^{-ikx} + \overline{\tilde{A}}e^{ikx} & x < -l/2 \\ \overline{\tilde{A}'}e^{-ikx} + \overline{A'}e^{ikx} & x > l/2 \end{cases} \quad (33)$$

Con:

$$\overline{\tilde{A}'} \equiv \overline{A} \overline{C} + \overline{A'} \overline{C'} \quad (34)$$

$$\overline{\tilde{A}} \equiv \overline{A} \overline{B} + \overline{A'} \overline{B'} \quad (35)$$

Escrita en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \overline{\tilde{A}'} \\ \overline{\tilde{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C} & \overline{C'} \\ \overline{B} & \overline{B'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A} \\ \overline{A'} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Definimos como matriz U :

$$U = \begin{bmatrix} \overline{C} & \overline{C'} \\ \overline{B} & \overline{B'} \end{bmatrix}$$

Del lado izquierdo de (36) se observan amplitudes que ingresan al sistema (incomming) y del lado derecho amplitudes salientes (outgoing). Por lo tanto si calculamos la inversa de dicha matriz debería corresponder con la matriz S , es decir, debería cumplirse:

$$U^{-1} = S \quad (37)$$

Calculando U^{-1} se obtiene:

$$U^{-1} = \frac{1}{\overline{C}^2 - \overline{B} \overline{C'}} \begin{bmatrix} \overline{C} & -\overline{C'} \\ -\overline{B} & \overline{C} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{C} & -\frac{\overline{C}\overline{C'}}{\overline{C}} \\ -\frac{\overline{C}\overline{B}}{\overline{C}} & \overline{C} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Igualando cada coeficiente de (39) con los de la matriz S (eq. (31)) se obtiene:

$$B = -\frac{\overline{C}\overline{C'}}{\overline{C}} \quad (40)$$

$$C' = -\frac{\overline{C}\overline{B}}{\overline{C}} \quad (41)$$

Lo que implica:

$$C' = B \quad (42)$$

Es decir, la matriz de Scattering es simétrica:

$$S = \begin{bmatrix} C & B \\ B & C \end{bmatrix} \quad (43)$$

En la siguiente subsección se analizará un ejemplo adaptado del libro CohenTanoudji (Complemento NIII).

1.3.1. Ejemplo potencial cuadrado simétrico

Se estudiará un potencial como el de la figura 6. La altura de la barrera es V_0 , pudiendo ser un valor positivo o negativo.

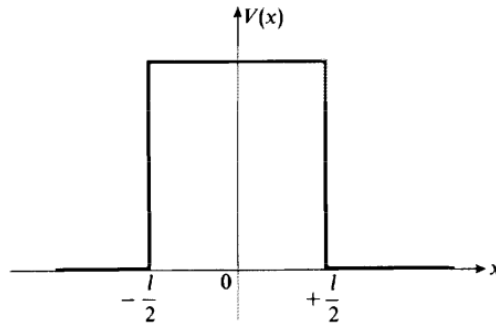


Figura 6: Ejemplo potencial barrera cuadrada.

Utilizaremos los coeficientes de transmisión y reflexión calculados en el Complemento H_I del CohenTanoudji ya que aquí nos interesa el análisis de la matriz de Scattering. Véase además el trabajo [3].

Como primer caso queremos obtener los coeficientes de transmisión y reflexión de una onda que ingresa desde la izquierda, los llamamos R_I y R_D , respectivamente. Para ello hacemos $A' = 0$ en las ecuaciones (11) y (12) resultando:

$$\tilde{A}' = CA \quad ; \quad \tilde{A} = BA$$

Finalmente los coeficientes de reflexión y transmisión resultan:

$$R_I = \left| \frac{\tilde{A}}{A} \right|^2 = |B|^2$$

$$T_I = \left| \frac{\tilde{A}'}{A} \right|^2 = |C|^2$$

De la misma forma para el lado derecho, haciendo $A = 0$ se obtienen los coeficientes de transmisión y reflexión, T_D y R_D de una onda que proviene del lado derecho:

$$R_D = \left| \frac{\tilde{A}'}{A'} \right|^2 = |C'|^2$$

$$T_D = \left| \frac{\tilde{A}}{A'} \right|^2 = |B'|^2$$

a. Caso $E < V_0$ y $V_0 > 0$

Para $E < V_0$ y $V_0 > 0$ se definen los parámetros:

$$k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

Luego, conociendo los coeficientes de C y B se pueden calcular los coeficientes transmisión y reflexión. En el complemento H_I del Cohen se calculan los coeficientes C y B:

$$C = \frac{e^{-ikl}}{\cosh(\rho l) - i \frac{k^2 - \rho^2}{2k\rho} \sinh(\rho l)}$$

$$B = \frac{-i \frac{k_0^2}{2k\rho} \sinh(\rho l) e^{-ikl}}{\cosh(\rho l) - i \frac{k^2 - \rho^2}{2k\rho} \sinh(\rho l)}$$

Es de interés observar que sus denominadores son iguales, es decir C y B tienen los mismos polos.

Luego la matriz de Scatering correspondiente resulta:

$$S(k) = \frac{e^{-ikl}}{\cosh(\rho l) - i \frac{k^2 - \rho^2}{2k\rho} \sinh(\rho l)} \begin{bmatrix} 1 & -i \frac{k_0^2}{2k\rho} \sinh(\rho l) \\ -i \frac{k_0^2}{2k\rho} \sinh(\rho l) & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Donde la variable k se define como:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

b. Caso $E > V_0$

Por otro lado para el caso $E > V_0$ y V_0 pudiendo ser positivo o negativo se definen los parámetros:

$$k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}$$

$$k_0 = \sqrt{\epsilon \frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

Donde $\epsilon = +1$ si $V_0 > 0$ y $\epsilon = -1$ si $V_0 < 0$. Los coeficientes B y C y la matriz de Scatering para este caso se puede escribir como:

$$C = \frac{e^{-ikl}}{\cos(k'l) - i \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \sin(k'l)}$$

$$B = \frac{-i \epsilon \frac{k_0^2}{2kk'} \sin(k'l) e^{-ikl}}{\cos(k'l) - i \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \sin(k'l)}$$

$$S(k) = \frac{e^{-ikl}}{\cos(k'l) - i\frac{k^2+k'^2}{2kk'} \sin(k'l)} \begin{bmatrix} 1 & -i\epsilon\frac{k_0^2}{2kk'} \sin(k'l) \\ -i\epsilon\frac{k_0^2}{2kk'} \sin(k'l) & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Se observa que para ambos casos la matriz S es simétrica, según lo demostrado en la sección anterior, esto es debido al hecho de que el potencial es real. Por otro lado se observa que la matriz posee polos dados por la anulación del denominador, el cual fue extraído como factor común fuera de la matriz.

1.3.2. Ejemplo potencial cuadrado

Para completitud del trabajo y por ser de interés cuando se trata scattering en el espacio 3-D se calculará la matriz de scattering en un potencial que se extienda desde 0 hasta l como el de la figura 7. Se estudiará el caso particular de momento angular nulo.

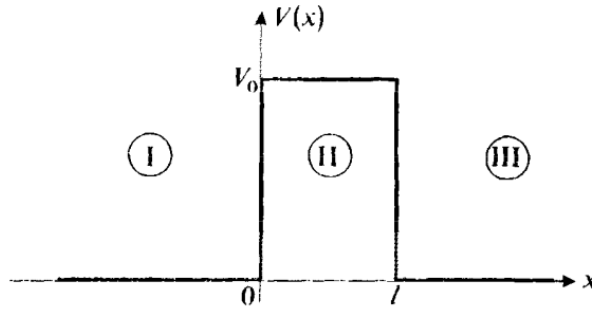


Figura 7: Ejemplo de potencial cuadrado.

El potencial tiene la forma:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq x \leq l \\ 0 & x > l \end{cases} \quad (46)$$

Donde el valor V_0 puede ser positivo o negativo.

Utilizaremos los coeficientes de transmisión y reflexión calculados en el Complemento H_I (págs. 72-73) de CohenTanoudji. Véase además el trabajo [3]. Definiendo:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}$$

$$k_0 = \sqrt{\epsilon \frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

Donde $\epsilon = +1$ si $V_0 > 0$ y $\epsilon = -1$ si $V_0 < 0$.

a. Caso $E < V_0$ y $V_0 > 0$

Para el caso $E < V_0$ con $V_0 > 0$ se obtiene:

$$C = \frac{e^{-ikl}}{\cosh(\rho l) - i \frac{k^2 - \rho^2}{2k\rho} \sinh(\rho l)}$$

$$B = \frac{-i \frac{k_0^2}{2k\rho} \sinh(\rho l) e^{-ikl}}{\cosh(\rho l) - i \frac{k^2 - \rho^2}{2k\rho} \sinh(\rho l)}$$

Luego la matriz de Scatering correspondiente resulta:

$$S(k) = \frac{e^{-ikl}}{\cosh(\rho l) - i \frac{k^2 - \rho^2}{2k\rho} \sinh(\rho l)} \begin{bmatrix} 1 & -i \frac{k_0^2}{2k\rho} \sinh(\rho l) \\ -i \frac{k_0^2}{2k\rho} \sinh(\rho l) & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

a. Caso $E > V_0$

Caso $E > V_0$ (V_0 puede ser negativo)

$$C = \frac{e^{-ikl}}{\cos(k'l) - i \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \sin(k'l)}$$

$$B = \frac{i \frac{k'^2 - k^2}{2kk'} \sin(k'l)}{\cos(k'l) - i \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \sin(k'l)} = \frac{-i \epsilon \frac{k_0^2}{2kk'} \sin(k'l)}{\cos(k'l) - i \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \sin(k'l)}$$

La matriz S resulta:

$$S(k) = \frac{e^{-ikl}}{\cos(k'l) - i \frac{k^2 + k'^2}{2kk'} \sin(k'l)} \begin{bmatrix} 1 & -i \epsilon \frac{k_0^2}{2kk'} \sin(k'l) \\ -i \epsilon \frac{k_0^2}{2kk'} \sin(k'l) & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Como conclusión se obtiene la misma matriz de Scattering para ambos potenciales, es decir un corrimiento en el eje x del potencial no afecta a la matriz S .

Como último desarrollo se pueden calcular los coeficientes de transmisión y reflexión:

Caso $E > V_0$ (V_0 puede ser negativo)

$$R = |B|^2 = \frac{(k^2 - k'^2)^2 \sin^2(k'l)}{4k^2 k'^2 + (k^2 - k'^2)^2 \sin^2(k'l)} \quad (49)$$

$$T = |C|^2 = \frac{4k^2 k'^2}{4k^2 k'^2 + (k^2 - k'^2)^2 \sin^2(k'l)} \quad (50)$$

Caso $E < V_0$ ($V_0 > 0$)

$$R = |B|^2 = \frac{(-k^2 - \rho^2)^2 \sinh^2(\rho l)}{-4k^2 \rho^2 + (k^2 - \rho^2)^2 \sinh^2(\rho l)} \quad (51)$$

$$T = |C|^2 = \frac{4k^2 \rho^2}{4k^2 \rho^2 + (k^2 - \rho^2)^2 \sinh^2(\rho l)} \quad (52)$$

Las ecuaciones (49), (50), (51) y (52) coinciden con las obtenidas en los trabajos anteriores [3].

1.3.3. Ejemplo coordenadas esféricas

La ecuación de Schodinger para un potencial independiente del tiempo es:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r})$$

En coordenadas esféricas:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\widehat{L}^2}{2mr^2} + V(r) \right] \Psi(r, \theta, \phi) = E\Psi(r, \theta, \phi) \quad (53)$$

Se verifica:

$$[\widehat{H}, \widehat{L}] = 0$$

$$[\widehat{H}, \widehat{L}^2] = 0$$

En la base común de autovectores de \widehat{H} , \widehat{L}^2 y \widehat{L}_z :

$$\widehat{H}\Psi(r, \theta, \phi) = E\Psi(r, \theta, \phi)$$

$$\widehat{L}^2 \Psi(r, \theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2\Psi(r, \theta, \phi)$$

$$\widehat{L}_z \Psi(r, \theta, \phi) = m\hbar\Psi(r, \theta, \phi)$$

La solución se puede descomponer en la parte radial y la parte angular:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (54)$$

La ecuación radial es:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] R(r) = ER(r) \quad (55)$$

Se puede resolver de manera sencilla definiendo una nueva función:

$$\frac{u(r)}{r} \equiv R(r) \quad (56)$$

Luego el problema se reduce a resolver:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \right] u(r) = Eu(r) \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (57)$$

En lo que sigue se quiere resolver un problema análogo al potencial cuadrado por lo tanto no consideraremos el momento angular ($l = 0$) la ecuación se simplifica:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) \right] u(r) = Eu(r) \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad (58)$$

Utilizando nuevamente las definiciones:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}$$

$$k_0 = \sqrt{\epsilon \frac{2mV_0}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{2m|V_0|}{\hbar^2}}$$

Donde $\epsilon = +1$ si $V_0 > 0$ y $\epsilon = -1$ si $V_0 < 0$.

a. Caso $E < V_0$ y $V_0 > 0$

Para el caso $E < V_0$ con $V_0 > 0$ a partir de la ecuación (58) se propone una solución:

$$u(r) = \begin{cases} A \sinh(\rho r) & 0 \leq r \leq l \\ \sin(kr + \delta) & x > l \end{cases} \quad (59)$$

Por condiciones de contorno:

$u(r)$ continua en l:

$$A \sinh(\rho l) = \sin(kl + \delta) \quad (60)$$

$u'(r)$ continua en l:

$$A\rho \cosh(\rho l) = k \cos(kl + \delta) \quad (61)$$

Dividiendo (61) con (60)

$$\cot(kl + \delta) = \frac{\rho}{k} \coth(\rho l) \quad (62)$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$\cot(a + b) = \frac{\cot(a) \cot(b) - 1}{\cot(a) + \cot(b)}$$

Se obtiene identificando $a = kl$ y $b = \delta$:

$$\cot(kl + \delta) = \frac{\cot(kl) \cot(\delta) - 1}{\cot(kl) + \cot(\delta)}$$

Despejando de la ecuación (62):

$$\cot(\delta) = \frac{\frac{\rho}{k} \coth(\rho l) \cot(kl) + 1}{\cot(kl) - \frac{\rho}{k} \coth(\rho l)} \quad (63)$$

Por lo tanto:

$$\tan(\delta) = \frac{1 - \frac{\rho}{k} \coth(\rho l) \tan(kl)}{\tan(kl) + \frac{\rho}{k} \coth(\rho l)} = \frac{1 - \frac{\rho l}{kl} \coth(\rho l) \tan(kl)}{\tan(kl) + \frac{\rho l}{kl} \coth(\rho l)} \quad (64)$$

Definimos los parámetros adimensionales p y z_0 de manera que:

$$p^2 \equiv (kl)^2 = \frac{2mEl^2}{\hbar^2}$$

$$z_0^2 \equiv \frac{2mV_0l^2}{\hbar^2}$$

Luego:

$$z_0^2 - p^2 \equiv (\rho l)^2 = \frac{2m(V_0 - E)l^2}{\hbar^2}$$

$$\frac{\rho l}{kl} = \sqrt{\frac{z_0^2 - p^2}{p^2}} = \sqrt{\frac{z_0^2}{p^2} - 1}$$

Finalmente la ecuación (64) resulta:

$$\tan(\delta) = \frac{1 - \sqrt{\frac{z_0^2}{p^2} - 1} \coth(\sqrt{z_0^2 - p^2}) \tan(p)}{\tan(p) + \sqrt{\frac{z_0^2}{p^2} - 1} \coth(\sqrt{z_0^2 - p^2})} \quad (65)$$

Como $E < V_0$ tenemos la restricción:

$$0 \leq p < z_0$$

b. Caso $E > V_0$

Por otro lado para el caso $E > V_0$ con V_0 pudiendo ser negativo.

$$u(r) = \begin{cases} A \sin(k'r) & 0 \leq r \leq l \\ \sin(kr + \delta) & r > l \end{cases} \quad (66)$$

Por condiciones de contorno:

$u(r)$ continua en l :

$$A \sinh(k'l) = \sin(kl + \delta) \quad (67)$$

$u'(r)$ continua en l :

$$Ak' \cosh(k'l) = k \cos(kl + \delta) \quad (68)$$

Dividiendo (68) con (67):

$$\cot(kl + \delta) = \frac{k'}{k} \cot(k'l) \quad (69)$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$\cot(a + b) = \frac{\cot(a) \cot(b) - 1}{\cot(a) + \cot(b)}$$

Se obtiene identificando $a = kl$ y $b = \delta$:

$$\cot(kl + \delta) = \frac{\cot(kl) \cot(\delta) - 1}{\cot(kl) + \cot(\delta)}$$

Despejando de la ecuación (69):

$$\cot(\delta) = \frac{\frac{k'}{k} \cot(k'l) \cot(kl) + 1}{\cot(kl) - \frac{k'}{k} \cot(k'l)} \quad (70)$$

Por lo tanto:

$$\tan(\delta) = \frac{1 - \frac{k'}{k} \cot(k'l) \tan(kl)}{\tan(kl) + \frac{k'}{k} \cot(k'l)} = \frac{1 - \frac{k'l}{kl} \cot(k'l) \tan(kl)}{\tan(kl) + \frac{k'l}{kl} \cot(k'l)} \quad (71)$$

Definimos los parámetros adimensionales:

$$p^2 \equiv (kl)^2 = \frac{2mEl^2}{\hbar^2}$$

$$z_0^2 \equiv \frac{2mV_0l^2}{\hbar^2}$$

Luego:

$$p^2 - z_0^2 \equiv (k'l)^2 = \frac{2m(E - V_0)l^2}{\hbar^2}$$

$$\frac{k'l}{kl} = \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{p^2}}$$

Finalmente la ecuación (71) resulta:

$$\tan(\delta) = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{p^2}} \cot(\sqrt{p^2 - z_0^2}) \tan(p)}{\tan(p) + \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{p^2}} \cot(\sqrt{p^2 - z_0^2})} \quad (72)$$

1.4. Dispersión por un potencial. Ondas parciales y Phase Shift

Para problemas en coordenadas esféricas, como el ejemplo de la sección 1.3.3, existe una relación entre la fase δ , también conocido con el nombre Phase Shift, y la matriz de Scattering.

Un método para estudiar problemas de dispersión de un potencial en mecánica cuántica se conoce con el nombre Ondas Parciales, el cual involucra el concepto de Phase Shift (o corrimiento de fase). El concepto se basa en analizar una onda plana (o paquete de onda) que interacciona con un blanco que posee un potencial (efectivo) arbitrario $V(r)$ acotado⁴. Luego de interaccionar con el potencial, aparecen dos contribuciones a la salida, correspondientes a la superposición del paquete de onda transmitido con una onda esférica con centro en el origen del potencial.

Como resumen⁵, la onda plana se expande en armónicos esféricos de la siguiente forma:

⁴Es decir potenciales que se anulan por fuera de un valor de radio dado r_0 . De esta manera estamos excluyendo potenciales de largo alcance como los de Coulomb, sin embargo los potenciales considerados en este trabajo son de corto alcance. Véase Messiah[5]

⁵Para más detalles ver por ejemplo el capítulo VIII de[1]

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos\theta)$$

Donde $j_l(kr)$ son las funciones esféricas de Bessel.

La onda esférica para distancias alejadas del blanco se describe como:

$$\Phi_s(\vec{r}) \rightarrow f_k(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Donde $f_k(\theta)$ se le llama amplitud de dispersión:

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos(\theta)) \quad (73)$$

Finalmente el comportamiento de la función de onda a la salida es la superposición de la onda esférica con una onda plana:

$$\Phi(\vec{r}) \rightarrow e^{ikz} + f_k(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

En la la sección eficaz diferencial de dispersión ($\sigma(\theta)$) se encuentra toda la información del potencial de interacción $V(r)$. Además la sección eficaz se vincula con la amplitud de dispersión de la forma:

$$\sigma(\theta) = |f_k(\theta)|^2$$

Por lo tanto reemplazando la ecuación (73) e integrando en el ángulo sólido se obtiene la sección eficaz total:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2(\delta_l)$$

Observación: en el ejemplo 1.3.3 no se incluyó el momento angular, por lo tanto solo se encuentra presente el término $l = 0$, es decir:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta$$

Finalmente se menciona la relación entre el Phase Shift y la matriz de Scattering:

$$S_l = e^{2i\delta_l} \quad (74)$$

1.5. Resolución de niveles de energía para átomo ^{209}Pb

Considerando un modelo de campo medio con potencial tipo **pozo**, es decir $V_0 < 0$, se pueden obtener parámetros para el ^{209}Pb :

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{-1} = 0,04801395461 \frac{1}{\text{MeV fm}^2}$$

$$V(r) = V_0 = -44,42 \text{MeV}$$

$$l = 7,524740 \text{fm}$$

Luego

$$z_0^2 = \frac{2mV_0l^2}{\hbar^2} = -44,42 \cdot (7,524740)^2 \cdot 0,04801395461 = -120,7616474$$

$$p^2 = \frac{2mEl^2}{\hbar^2} = E \cdot 2,718632313$$

$$p^2 - z_0^2 \equiv (k'l)^2 = \frac{2m(E - V_0)l^2}{\hbar^2} = E \cdot 2,718632313 + 120,7616474$$

$$\frac{k'l}{kl} = \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{p^2}} = \sqrt{1 + \frac{120,7616474}{E \cdot 2,718632313}} = \sqrt{1 + \frac{44,42000002}{E}}$$

$$\tan(\delta) = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{p^2}} \cot(\sqrt{p^2 - z_0^2}) \tan(p)}{\tan(p) + \sqrt{1 - \frac{z_0^2}{p^2}} \cot(\sqrt{p^2 - z_0^2})} = \quad (75)$$

Remplazando los valores del ^{209}Pb tenemos:

1- Caso $E > 0$ en unidad $[E] = \text{MeV}$ y $V_0 < 0$

$$\tan(\delta) = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{44,42000002}{E}} \cot(\sqrt{E \cdot 2,718632313 + 120,7616474}) \tan(\sqrt{E \cdot 2,718632313})}{\tan(\sqrt{E \cdot 2,718632313}) + \sqrt{1 + \frac{44,42000002}{E}} \cot(\sqrt{E \cdot 2,718632313 + 120,7616474})} \quad (76)$$

En las figuras 8, 9 y 10 se muestran las gráficas de $\tan(\delta)$, δ y $A = \sin^2(\delta)$, respectivamente.

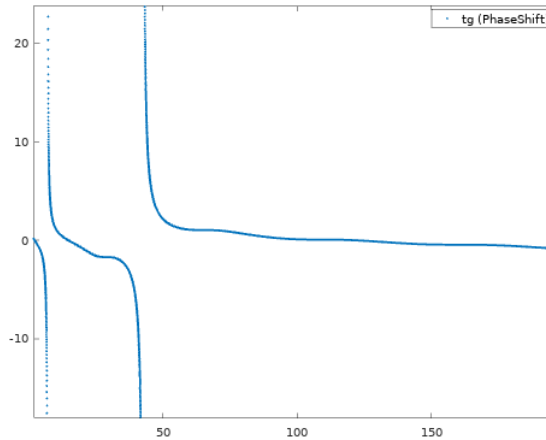


Figura 8: Gráfica de la tangente del Phase Shift en función de la energía E. ($[E]=\text{MeV}$).

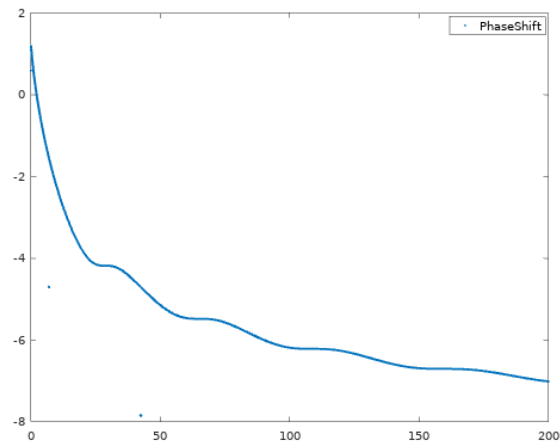


Figura 9: Phase Shift para el ^{209}Pb .

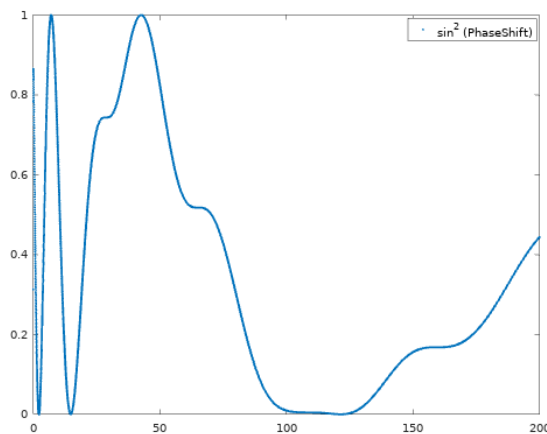


Figura 10: Amplitud del Phase Shift para el ^{209}Pb . ($A = \sin^2(\delta)$)

1.6. Comparación entre Matriz de Scattering y Phase Shift

En esta sección queremos comparar los resultados obtenidos para el plomo 209 en el formalismo de phase shift con la matriz de Scattering.

Tenemos que encontrar los polos de la matriz de Scattering, para ello calculamos el módulo de dicha matriz y buscamos los ceros del denominador, es decir, los polos del coeficiente de transmisión de la ecuación (50).

Primeros reescribimos la ecuación (50) con los coeficientes adimensionales antes mencionados, resultando:

$$T = \frac{4(p^2 - z_0^2)}{4(p^2 - z_0^2) + \frac{z_0^4}{p^2} \sin^2(\sqrt{p^2 - z_0^2})} \quad (77)$$

En función de la energía:

$$T = \frac{4(E \cdot 2,718632313 + 120,7616474)}{4(E \cdot 2,718632313 + 120,7616474) + \frac{(-120,7616474)^2}{E \cdot 2,718632313} \sin^2(\sqrt{E \cdot 2,718632313 + 120,7616474})} \quad (78)$$

En la figura 11 se muestra la comparación de la amplitud de Phase Shift ($\sin^2(\delta)$) con el módulo de la matriz de Scattering (coeficiente de transmisión, eq. (78)). Los valores están adaptados a un pozo cuadrado que representa al átomo plomo 209.

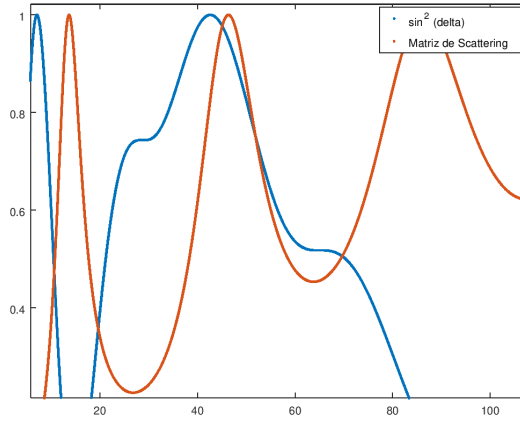


Figura 11: Comparación formalismo de matriz de Scattering con Phase Shift para un pozo de potencial como ejemplo el plomo 209.

La gráfica de la matriz de Scattering toma valores iguales a 1 para ciertos valores de energía E en MeV, éstos puntos representan valores donde el coeficiente de transmisión se hace 1, es decir, no hay ninguna reflexión de la onda incidente.

Por otro lado la amplitud de Phase Shift es igual a 1 cuando la fase es $(\pi/2 + k\pi)$ con $k \in \mathbb{N}_0$, es decir, se encuentra presente un desfase de $\pi/2$ entre la onda incidente y la reflejada.

Queremos realizar una comparación más precisa de ambos formalismos. Para ello solo vamos a considerar la primer resonancia, entonces aumentamos $|V_0|$ comenzando desde el valor nulo $|V_0|$ hasta que la primer resonancia coincida, el resultado se da para un pozo $V_0 = -2,72 MeV$ y se muestra en la figura 12.

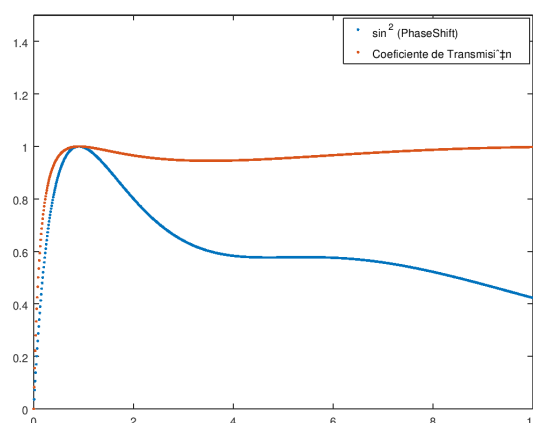


Figura 12: Comparación entre phase shift y matriz de scattering. Valor obtenido $V_0 = -2,72MeV$

2. Conclusiones

Este trabajo fue realizado en simultáneo con el cursado de la materia de Mecánica Cuántica I. Los conceptos estudiados ayudaron a profundizar los temas aprendidos en dicha materia, al mismo tiempo repasar temas aprendidos anteriormente, como el formalismo de la función de Green y el concepto de sección eficaz.

Dentro de los temas aprendidos se pueden destacar:

- Se vinculó el principio de la causalidad con la analiticidad de la función de Green.
- Se analizó la matriz de Scattering y se identificó un significado físico a cada componente.
- Se demostraron algunas propiedades de la matriz de Scattering, como ser la **hermiticidad** y la **unitariedad** cuando el potencial V es complejo. Por otro lado la **simetría** de reversión temporal cuando el potencial V es real.

- Se calculó la matriz de Scattering para los casos de un potencial cuadrado simétrico y no simétrico, encontrando que tienen la misma matriz de scattering cuando el ancho y la altura es la misma.

- Se realizó un ejemplo en coordenadas esféricas (sin momento angular), donde se muestra el concepto de Phase Shift.

- Por último se realiza un ejemplo numérico con los valores de V_0 y ℓ simulando ser un átomo de ^{209}Pb . - Se comparan ambos formalismos, Matriz de Scattering y Phase Shift. Se encuentra que la primer resonancia en la que ambos formalismos coinciden se da para $V_0 = -2,72MeV$, teniendo como fijo el parámetro del ancho del pozo en $\ell = 7,524740fm$.

3. Trabajos futuros

Si bien en la comparación trabajamos con la matriz de Scattering y la amplitud de phase shift resta encontrar la relación entre ambos formalismos. Para esto se podría trabajar con la parte real de la matriz de Scattering, en lugar del módulo como se ha trabajado, e interpretar la parte compleja de la energía como el ancho de la resonancia. Además resta tener en consideración la fórmula (74) aplicada al ejemplo del Plomo.

Otro tema a tratar puede ser agregar momento angular distinto de cero y calcular las ondas parciales.

También se puede estudiar el tema del retardo temporal debido al phase shift.

4. Agradecimientos

Agradezco a Rodolfo M. Id Betan por su paciencia, las fructíferas discusiones y la ayuda brindada.

Referencias y Bibliografía

- [1] Cohen Tanoudji; (1973) *Quantum Mechanics. Vol I , Vol II*
- [2] H. M. Nussenzveig; (1972) *Causality and dispersion relations*, Academic Press.
- [3] Franco Gerdau; Alan C. Dassie; *Adscripciones realizadas en IENRI en el intervalo 2018-2019*.
- [4] Fabrizio Dolcini. (2009) *Introduction to the Scattering Matrix Formalism*. Lecture Notes for XXIII Physics GradDays, Heidelberg.
- [5] Messiah (1967) *Quantum Mechanics: Vol I , Vol II* North Holland Publishing Company Amsterdam.
- [6] V.I. Kukulin; V.M. Krasnopol'sky; J. Horáček; (2007). *Theory of Resonances*. Springer Netherlands. (1989)
- [7] N.Hatano; H. Nakamura; T. Petrosky. (2007) *Definition and computation of the resonance state in Quantum Mechanics*.